数理解析研究所講究録 1317 巻 2003 年 39-49

特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか（I）

—— 初期の概念とその背景 ——

芝浦工業大学システム工学部　阿部剛久（Takehisa　Abe）
Faculty of Systems Engineering,　Shibaura Institute of Technology

序. ここで云う「特異性」とは、数学の種々の分野で常識的な概念である「連続性」または「非特異性」に相反する概念を指すものである。後者の場合とは全く異なって、特異性とは数学的対象に存在する種々の特異点およびこれらを生成起因として対象に付随する特異現象を合わせた概念を意味するものであり、また両者の相互依存の関係一般を指す概念用語であるとする。一般的には数学的対象の不連続性を意味するとしてよいだろう。

近代以前（１９世紀以前を指す）の西欧諸国、とりわけドイツでは後に触れるように‘特異な’という語は‘不連続な’という語にもまして忌み嫌われた存在であったことは現代では想像し難いであろう。このことは、当時のドイツではそれほどまでに連続の思潮の徹底的な存在とその影響に由来することを示すものである。したがって、近代ドイツでは数学上特異性の概念に関する用語は確定しておらず、Riemann でさえ当初はこれ等を不連続という言葉で仮に表現するにとどまった。Riemann にとって対象の不連続性とは特異性を意味するものであったことは本論で述べられよう。

さて数学における連続性の概念または問題は古代ギリシャ以来今日まで議論され、数学における中心的なテーマであり続け、数学の各分野を横切る共通の問題として数学を本質的に発展させ現代に至っている。この問題は哲学者をも古来から参加させ広く一般の関心を呼び続けたものであり、数連続体の連続性の問題は不連続性との矛盾となって数学史上常に議論され、数学の発展の契機となり、そこでの新しい概念と方法の創造は数学の基礎の反省に伴う認識の更新を促してきた。すなわち、実数概念からトポロジーの発展へと導き、更に現代の数学基礎論の範疇での数連続体の実体に関する認識を一層深化させるとともに、関数および多様体に関する成果の飛躍的な進展を生み出すに至っている。これらは全てその根底に連続概念の素朴なイメージから出発して今日に成長してきたものばかりである。この意味でも数学における連続性に関する問題は将来へかけても重大な関心事であることに違いないであろう（たとえば、[1]、[2]）。

本研究の目標は連続性問題の最も重要な対象である関数や多様体等、およびこれらに付随する純粋、応用面の数学的現象の解析的または幾何学的なものの特異性問題を取り上げ、これを考察していくことである。この問題は連続性の問題に潜在しつつ人々の意識にのぼることが遅れ、連続性の問題が活気を呈する以前に表立って取り上げられた形跡は見当たらない。したがって、実質的に数学の進展に寄与し始めたのは連続性の問題に比較してかなり遅れ、しかも急激な進展もなく、漸くその固有の存在権利が認められるに至ったのは１９世紀も終わり近くになってからとみなしてよい。それまでは極く少数の数学者を除いて特異性の概念は数学の世界に定着し得たものでなかった。このような状況下で複素関数論や複素解析学、代数幾何学は着実にこれを自己の財産としてその成果を蓄積していった。それは２０世紀前半までは飛躍的な進歩発展があったとは云えないであろうが、後半以降にかけての

十分な素材的準備をなし得ていたと云ってよい。加えてトポロジー方面の進歩は特異性の問題を一層見通しのよいものにしていく時期でもあった。２０世紀後半に入って、この問題は大きな数学的課題にまで成長し、殆どあらゆる分野にまたがる共通の問題へ一般化され、独自の展開がなされていく。その歴史は比較的浅いが、これからの一層の発展が将来へかけて数学の内･外を問わず期待されよう。前世紀後半の半ばに入って以来、数学を中心に、これを方法的基礎とする多くの学術分野を統合的視野に容れた数理科学の勃興とその発展は新たな特異性の問題を提起しつつあって、その問題の究明は留まることなく進展している。

今なお一般には連続性の問題ほどには馴染みが薄いかもしれぬ特異性の問題を敢えてここで取り上げた目的は、この問題の分析およびその数学の形成発展に関する考察と歴史的展望を行うことであるとともに、数学または数理科学へのその寄与の評価を試みようとするものである。そのとき、この問題の意義の重要性を再確認することが可能であろうと期待したい。なお、この問題に関するこの研究集会「数学史の研究」での議論の展開は特に変更が生じない限り、概ね次の順序で行いたい：

(I)　　概念の発祥と形成要因：１８５０～１８７０年代

(II)　　特異性の問題に関する近代数学の発展･形成：１８８０～１９４０年代

(III)　　その後の進展と数理科学：１９５０～現代

今回の発表は上記 (I) である。

終わりに本テーマ研究の動機等を苦い思い出とともに触れておきたい：１９６０年代後半頃、著者は数学におけるいくつかのテーマに関心を抱いて研究中であったが、I.G.Petrowsky の論文 (Math.Sb.,17（１９４５)) を読んでから双曲型偏微分方程式の解の lacuna（空隙領域）に関する問題は不思議なほど神秘性に富んで見え、その存在条件、形状等は云うまでもなく、その形成に本質的な役割をもつ基本解の構成も興味深い問題であった。これらの問題研究に必要な方法は関数解析やその他の解析が主要なものではなく、代数幾何学や位相幾何学が基本的手段だと察知してこの方面から問題を考察し始めたが、代数積分としての解の特異点（代数多様体）とその近傍での解の挙動等、特異性の問題に直面するとともにこれらを代数的･位相幾何学的に表現する困難さを味わう日々が続き、特異点をもつ代数多様体上のコホモロジーに関する１，２の結果を得たに過ぎなかった。要するにホモロジー的な問題が残されたのである。結局これらの問題を含む lacuna に関する基本的解決は Atiyah-Bott-Garding の論文 I (Acta.Math.,124（１９７０)) & II (同,131（１９７３)) によって成功を見た（が、後にこれ等の問題は microfunction と呼ばれる超関数の立場から一般化された議論も可能となる。他方で幾何学の伝統的手法によって基本解の特異性を徹底的にホモロジー化、かつコンピュータによるその構成のためのアルゴリズム化の研究も現在行われている)。このような問題に類似のものは理論物理学で著名な Feynman 積分の特異性であろう。これらに関しては総じて (III) で述べる予定でいる。

ところで、上記の研究そのものの成功には全く至らなかったが、他の問題研究への関心もあって気をとり直して再び研究を始めたのは７０年代前半の終わり頃であった。また７０年前後の３，４年間は世界的に大学紛争の時代でもあって、日本でも社会的に騒然とした時期でもあった。著者の勤務する大学もその例に漏れず、各セクト間の抗争の場ともなり、殺人事件まで発生するに及んだ。度重なる団交と大学封鎖、機動隊の乱入と威嚇、教育研究は異常な事態に陥り、人間関係も疑心暗鬼の思いをお互い舐める日々であった。荒廃した大学を招いたこの紛争の意義とその評価は別問題として、こ

の最中に先のテーマ研究を遂行し続けることは著者の力を遥かに超えた問題であり、不運と思えばそれで諦めもつくと自分に云い聞かせるのみであった。幸いに数学の応用問題を２，３仕上げて気持ちを癒すことができた頃（７５年前後)、図書館で偶然見つけた書物 S.Bochner 著（村田全　訳）［３]に接することができ、以来数学や数理科学固有の問題以外に数学史･科学史、科学の哲学等に関心を向けるようになった。ところが更に偶然が重なって、Bochner 自身による特異性概念の史的展望[４]に接したことから、自分にとって大問題であった当初の研究体験を顧みてこれ等を含む形で特異性に関する総合的な科学史研究を手掛けてみようか、と考えた。Lacuna の研究がこちらの研究へと転じたとでも云えようか。以上が本研究への動機である。

Bochner の論文[４]を読んで後、その内容を詳細に調べ、考証することを意図して得た結果が著者のこの方面に関する最初の報告[５]と[６]である。その後、同テーマの II(本講演の予定（II）に当たる）の原稿はほぼ完成しながら未発表のまま今日に至っている。それは一次文献としての原文献の入手が容易でないもの、考証の不徹底に満足し得ないものが散見し、加えて報告 III の問題対象がその後活発な進展状況を見せて、その情報の収集に少なからず時間を費やし、今なお継続中にあるためである。このような事情によりこれ等の成果の発表は必ずしも順序よくなされるとは思っていないが、可能な限り予定内容を何回かに分断しても体系的かつ組織的に発表できれば幸いである。なお本著 I の詳細は[５]および[６]にある。

１．特異性の概念の起こり

特異性の概念または問題は１８世紀以前には全く文献上見られない。力学をはじめ物理学、天文学等は１８世紀までに数学と密接な関係を保って近代的様相を呈してきたが、特に力学は数学的な組織化の状況にあった。このような自然科学領域では複雑な現象の数学的定式化はこの頃から進んでくるが、現象の中には流体の運動、波動の伝播、天体の運動等様々のものがあり、その中に特異現象の存在を既に察知し得たものがあったと思われる[1]。しかしながら、１８世紀の人々は数学的方法の未開発な状況下ではそれ等の適切な定式化と特性表現を得るには至らなかった。特に関数概念の発達と微分方程式の扱いの進歩を必要としていた[2]。

ここでは数学自体としての初めての特異性概念の意識とその数学的意義等を考えてみたい。先ず近代的に純粋な形で特異性の概念が確立されてくるのは１９世紀後半から末にかけてであり、その起こりの最初は G.F.B.Riemann（１８２６－６６）による（複素）関数論的な特異点であり、すぐ後に続いて A.Cayley（１８１５－９７）による（代数）幾何学的特異点があり、これ等に幾分遅れて H.Hankel（１８３９－７３)によって測度論的または実関数論的な特異点の提唱があり、数年後に K.T.Weierstrass（１８１５－９７）は Riemann とは異なる意味の関数論的特異点を導入した。これ等の特異点には必然的に一見奇妙な数学的現象が伴い、両者が一体化されて特異性の概念が生じてくる。

（１）　**関数論的特異点**（１）Riemann は流体力学的考察を基盤に彼の複素関数論は出発する。彼は学位論文「複素関数論の一般論の基礎」（１８５１）［７]において複素平面上のｼﾞｮﾙﾀﾞﾝ閉領域を他の複素平面上の閉単位円板に等角的に写像すべき関数の存在理論を確立し、後にトポロジーを解析学へ方

法的に導入して複素関数論の中心的意義をもつに至ったリーマン面の構成も与えられている。前者はリーマンの写像定理と呼ばれる等角写像論の基本に位置し、後者は後の「アーベル関数論」（１８５７）で再導入され、アーベル積分やアーベル関数の理論の体系化に用いられ、今日の解析的な多様体の構成につながるものとなる（　　）。ここの場合に深く関係するのは前者であり、その主張は、一般の単連結領域はその性状により三つの型に分類され、これ等の型に属する領域を基準領域へ等角写像する際に最も問題となるのは双曲型に属する場合で、それに対して円の内部を基準領域として採用できる、と云うものである。ここで三つの型は等角写像によって不変に保たれる性状に基づく分類であり、その設定は特異点に関する定理（最初はRiemann,後にWeierstrass, Picard 等に負う）に基づく結論（単葉等角写像での孤立特異点の孤立境界点への対応）を媒介とする。こうした数学的必然性の中からRiemann の特異点が派生したきたわけである。

この特異点が関数の除去可能な特異点であり、関数の特異性を正則化することにおいて、Riemann の除去可能な特異点に関する定理に結実する。この時点で Riemann には関数論的な特異点の存在とそれに基づく関数の特異性が既に明確に意識されていたと考えられる。彼の除去可能な得意点に関する定理は、関数の Laurent 級数の和の有界性より直ちに得られが、その結論はこの展開における主要部の係数が全て消える、すなわち関数 $f(z)$ の Laurent 展開

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

に対して

$$^{\exists}K,\ 0<|z-z_0|<R \text{ で } |f(z)|\leq K \Rightarrow {}^{\forall}n,\ C_{-n}=0$$

を主張する。（この定理の最初の発見者について W.F.Osgood（１８６４－１９４３）による異論があるが、それは正しくないとされる。詳しくは[５]の p. ６１参照。）この結果は複素関数論のみならず、彼自身によって後に偏微分方程式の解に関する議論にも適用され拡張されている。(II) で触れよう。

ここで注目すべきことは、Riemann は特異点 “Singularitat” なる語は用いておらず、代わりに不連続点 “Unstetigkeit” なる語を使用している。それぞれは singularity および discontinuity に当たるが、Unstetigkeit に代わってドイツ語化された Diskontinuitat も今ではよく用いられることであるが、Riemann は偏微分方程式の仕事でこの語をいくらか使っている。当時のドイツでは特異点や特異性等は数理科学的概念として見出されていなかったため、彼は連続の反意語として一般的な不連続の言葉を敢えて使用したのであろう。

（２）　**代数幾何学的特異点**　Riemann に次いで１年後に特異点の代数幾何学を発表したのは Cayle である（１８５２）［８］。Riemann が特異点を Unstetigkeit または Diskontinuität と呼んでいた頃までは今日のような Singularität＝singularity, singular point の呼名は確定していなかった、というのは、当時点では特異点そのものがその固有の評価を得ず、数学一般の流通概念ではなかったからである。しかしながら、Cayley はその発表の時点で今日の数学用語である singularity を用いている。結局、呼称の上では Cayley のものに落ち着いたことになる。

Cayley は本来代数学者であり、自分の専門とその応用としての幾何学を行った人であるが、代数幾何学もその一環であり、後年それがドイツ、イタリアで華々しく展開されるに先立ってその特異点の分類と具体的な命名は彼に負うところ大きい。Cayley と云えば J.J.Sylvester（１８１４－９７）を連想させるが、それほどまでに両者の関係は親密であった。詳細は[５]にあるが、幾何学的特異点の直観的な各種呼称は Cayley 自身が単独で仕上げたものと推測される。Cayley の特異点の各種呼名は今日でも代数幾何学をはじめ微分幾何学や曲線の幾何学でその多くが用いられていて実質的な変化はないようである。そのうちのいくつかを示そう：

既約な代数曲線 $C:f(x,y)=0$ の点 $\varphi=(a,b)$ が k 重点であるとは C の定義式の左辺について、$f(x+a,y+b)$ を x, y の多項式とみて最低次の項が k 次であるものをいうが、k 重点では重複度を込めて k 個の接線を引くことができる。このとき、$k>1$ ならば、点 φ は C の**重複特異点** (multiple singular point) であり、φ での２本の接線が相異なるような点 φ は C の**二重点** (double point) と呼ばれ、特にこれを**結節点** (node, ordinary double point) とも呼ぶ。たとえば、簡単な例で $y^2=x^2(x+a)$ の場合を見ると、$a>0$ では $\varphi=(0,0)$ は結節点であり、$a<0$ では φ は**孤立特異点** (isolated point)，$a=0$ では φ は**尖点** (cusp) と呼ばれる。幾何学的図示は省略するが、C と φ を描いてみれば特異点のそれぞれの呼称が実にその名に相応しいことがわかる。ここで用いた術後のうち、ボールドで示されたものは Cayley の命名によるものである。以下同様とする。また、微分幾何学的な定義では、**変曲点** (point of inflection) は通常の曲線の凹凸に基づいて定義され、その判定等は微積分の教科書にあるとおりだが、代数幾何学的な定義では変曲点は曲線 C 上の点 φ における接線が C と高次の接触をするとき、φ を C の**変曲点**（同様）と呼ぶ。このとき φ は C の双対曲線の尖点に対応する。その他、**変曲（点）的結節点** (flecnode) や**二重点（結節点）的変曲点** (spinode) も与えられている。以上は例に過ぎず、彼による曲線や曲面に対する分類と呼称は数覆い。

Riemann や Cayley の時代においては特異点の数学はまだ一般に受け入れられるものではなかったが、この当時にこの分野でそれを意識的にかつ積極的に取り上げて関数または多項式の特異性を曲線等の幾何学的特性に還元せしめた仕事は高く評価されよう。なお特異性の数学に対する代数幾何学と複素解析幾何学の在り方は異なる面が多く後に触れたい。

（３） **測度論的特異点** Riemann の学位論文が現れてから約２０を経て Hankel によって「無限振動と不連続関数について」のメモが現れた（１８７０）[９]。彼は Riemann や Weierstrass の影響下で一様収束の概念および関連した諸問題の組織的検討や Riemann 積分を通して連続体や実変数関数の深い研究を行ったが、この論文はこれ等の仕事の一環であった。

F.M.C.Fourier （１７７２－１８４０）、P.G.L.Dirichlet（１８０５－５９）以来、三角級数に端を発した関数概念の拡張は関数の積分の基本まで立ち入り深化されていった。Riemann による積分は不連続点が到るところ稠密な集合であるような関数に対してもその可積分性が確かめられている。このとき、不連続点の稠密集合は可積分関数にとっては積分の上で影響しない集合であって、このような集合の特徴付けは測度の理論に含まれる。彼は Riemann の三角級数に関する唯一のメモ[１０]において述べられた不連続関数の構成を見て“特異点の濃縮の原理”の示唆を得た。この原理は複素関数論的な、また代数幾何学的な特異性でもない実関数論における測度論的意味（不連続点集合の測度が消える）をもった関数の構成的な特性を指すものであり、これまでの特異性とは全く異なった特異性と呼ぶべ

きであろう。ここではこれを仮に実関数論的または測度論的特異性と呼んで他と区別すれば、彼によってこの論文中に初めて新しい特異性の概念が導入されたと云えよう。

彼のこの５０ページにわたる論文の中身を説明することは多少苦痛であるから省略するが。要するに不連続点の稠密集合は Riemann 積分に寄与しないことを主張するものであって、その特徴として測度が零であることを示すものである。この Hankel の原理の呼称は特異点の原理としては今日では馴染みが薄いであろうが、これは先の（１）や（２）の場合と異なり測度的意意味を介するためでもあろうが、もう一つの理由は C.Carathéodory（１８７３－１９５０）の一実変数関数の先導的扱い[１１]における多くの反例の拠りどころとして、G.Cantor（１８４５－１９１８）の３進集合や G.Hamel（１８７７－１５４）の基底とともに用いられ、これ等の構成と多少結びついているためにこれ等の名に隠れた感が強い。このことは Hankel の原理の当初の独自の意義を薄れさせておるであろう。

（４）　**関数論的特異点**（２）Weierstrass は慎重な推論に基づき解析学を行ったことでよく知られるが、特に一変数の複素関数論でその業績は顕著である。Riemann の写像の存在定理は Weierstrass の厳しい批判に晒されてから発表後半世紀以上もその確証を求めさせられたことはあまりに有名である。これも本論に関わる故にこの辺の事情も[５]に述べておいた。

さて、Hankel 後、Weierstrass によって第四番目の特異性概念の意味が導入された（１８７６）[１２]。これは古典的な解析学における話題に端を発するもので彼の定式化は今では古く、幾分制限があって、それをそのまま再現するのは現代の数学にとってその目的に適さない。したがって、ここでは Bochner 教授の示唆[3)] にしたがってこれを見ることが望ましい。

一般に多価関数としての解析関数は各部分領域で与えられた正則関数を要素として解析接続を行うことによって得られた要素全体としての正則関数であると考えられる。これは一点の近傍で正則関数が冪級数に展開されると、一致の定理に基づきこれに解析接続を行い達せられるもので、解析関数を構成する基礎としてはその部分表示で十分である。Weierstrass はこの冪級数から出発して解析接続を行う操作により彼の関数論が展開されていった。

ここのところ通常のやり方に沿って述べて見よう：中心が z_0 の冪級数

$$P(z;\ z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n,\ C_n = \frac{1}{n!}P^{(n)}(z;z_0) \quad (1)$$

の収束半径を $r\,(z_0)$（$0<r\,(z_0)<\infty$）とし、改めてこれを z_0 を中心とする一つの関数要素と呼ぶ。この収束円内の任意の一点を z_1 とすれば、これと収束円 $|z-z_0|=r\,(z_0)$ との距離は $r\,(z_0)-|z_1-z_0|$ に等しいから、$P(z;\ z_0)$ は z_1 の周りの半径が少なくとも $r\,(z_0)-|z_1-z_0|$ なる円内で冪級数に展開され、それによって得られる関数要素

$$P(z;z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n(z - z_1)^n,\ C'_n = \frac{1}{n!}P^{(n)}(z_1;z_0). \quad (2)$$

の収束半径を $r\,(z_1)$ とすれば

$$r(z_1) \geqq r(z_0) - |z_1 - z_0| \qquad (3)$$

このとき特に（３）で不等号が現れる場合は、これによって初めに $|z-z_0|<r(z_0)$ で（１）により与えられた関数の定義域は上の両収束円の和である領域にまで拡げられたことになる。ここで（２）の場合を（１）の直接接続と呼び、この操作を有限回行って得られる関数要素を（１）の間接接続と呼ぶ。これ等は関数論を学んだ人々には常識的な事柄である。ここで例外的なものに触れると、関数要素の収束半径が ∞ のときはどのような解析接続も常に ∞ の収束半径をもち、この整関数は任意の一つの関数要素にとって解析関数としての全貌が表示されていることになる。これに対する極端なものとして、要素（１）の収束半径が有限であってどのような直接接続を行っても（３）で等号が成立する場合である。このときは、（１）で定義される関数に対してその収束円周上の全ての点が特異点であって、このときはもとの関数要素（１）そのものが解析関数の全貌を表示していることになる。この場合は（１）の収束円 $r(z_0)=|z-z_0|$ が既に自然境界（解析関数の存在領域の境界）となっている。このように解析関数の最大正則域を超えてその自然な接続的な拡張は不可能であり、もともとの領域の境界点を特異点と見なす。これは関数の接続的意味での拡張に伴う境界の特異性を示唆するものとして収束円周上の点全てが特異点である。これはまた解析接続を曲線

$$C:\ z=z(t)\ (t_0\leqq t\leqq t_1)$$

に沿って行うとき、任意の $\delta>0$（$\delta<t_1-t_0$）に対してその部分弧 $z=z(t)$（$t_0\leqq t\leqq t_1-\delta$）に沿っては要素 $P(z;\,z(t_0))$ は接続可能であるが、C 自身に沿っては、すなわち端点 $z(t_1)$ までは解析接続不能であれば、要素の接続は座標 $z(t_1)$ をもつ点の上に一つの特異点を定めることとなる。このように様々な接続に対する可能性の限界を与えるべき境界点としての特異点の存在が注目されるわけである。

ところで、このような特異点が関数の定義域の境界上に孤立特異点として存在する場合等の領域の変換に伴う境界点としての特異点の有様や変換によるそれへの影響に関する問題が考えられる。これらは一変数の場合であるが、一般に多変数の場合は解析空間で解析的拡大と呼ばれる一種の解析接続が可能であり、一変数の場合に見られない現象が起こる。以上これ等に関しても[５]に言及してある。また、Weierstrass の考えたことは一変数の場合の上記のような解析接続によって生じる特異性の問題であった。Weierstrass の他にも、領域の境界上での関数の特異性の問題を考えた人々もいるが、殆ど成功を見なかったようである[4)]。

（５）**補足 — Plücker の仕事 —** 上記の４人に先立って特異点に関する先駆的な研究を行ったのは J. Plücker（１８０１－６８）である。彼は射影座標としての Plücker 座標を導入し、後に Cayley の貢献（Cayley 形式）もあって今日の W. L. Chow（？－？）座標の原形となった。幾何学的対象を要素として新しい型の双対性を生み、空間次元は要素を定義するに必要なパラメータの数に依存する数であることを導いた。今日で云う数多い定義や考え方のある moduli 問題の原形を与えるかのようである。これ等の仕事は彼が幾何学者であると同時に実験物理学者でもあった故の空間的対象の優れた巨視的把握力に基づいてなされたものかもしれない。それはこれ等の仕事にとどまらず、彼はまだ呼称もない奇妙な点（特異点のこと）が代数曲線に存在して曲線の次数や奇妙な点の数の間に成り立つ関係、「Plücker の公式」を見出した（１８３４，３９）。その他、彼の特異点と種々の不変量間の関係式は

これ等の重要な定量的定式化を与える端緒となったと考えられる（たとえば、[１３]、[１４]参照)。しかしながら、特異性の考えにはまだ至っていなかったことはやむを得ないであろう。

以上で特異性概念の発端を終える。実質的には１８５１年から１８７６年にかけて今日から見ても最も基本的でかつ重要なものが揃ったと考えられる。まだこの時点では問題は単一なもので、それぞれの固有の概念や問題の深化と発展は急にはなされてないが、やがてこれ等の概念は数学界に定着しつつ次の２０世紀へかけて関連した概念や問題の進展につながっていく。たとえば、代数曲線や曲面の理論はRiemann 面の理論とともに位相的考察の下で特異点を含む場合も込めて様々な形で発展していくし、解析学とその応用分野へ取り入れられてくる。また一方で、新たな特異性の概念および問題の開発的進展が重なり多彩な時代を迎える。これ等は本稿のII 以降で議論されよう（[６]も参照)。

2.　特異性概念の背景と形成要因

ここでは、近代数学発祥の地である西欧の主要国であるフランス、ドイツ、イギリス等の１９世紀前半に至るまでの全般的な歴史的展望を踏まえ、特異性概念の起こった要因を考察し、理解することを目的とする。ただし、本著述では紙数の制限故これ等近代西欧の史的状況の概観を総じて述べることはできないのでそれは[５]に譲るが、その内の数学の発展と形成に影響を与えた文化的環境（外的要因）は重視すべきであるから、先ずこの方面に関して述べ、次に特異性概念に直結する近代数学の必然的形成（内的要因）を議論する。

（1）外的要因 — 連続の思潮 —　近代西欧の史的状況の中でも学術や芸術に関わるとりわけ重要な要素は社会的文化的環境であることは云うまでもなく、数学を初めとする自然科学にとってもそれは例外でない。特異性の概念に関する限り、特に当時の哲学思想が深く関係してくる。

これ等の特徴は常に評価されるようにフランス精神にあっては実証的、合理的であり、批判性に富み、学芸面は論理の整合性と形式を重んじ無矛盾の体系を志向し、ドイツは国家の統一に至るまで周囲の暴風雨と無秩序·無形式の中で、ドイツ文化を代表するものは大学であり、その理念は自己の象牙の塔のごとき小宇宙と考え、大学の自治、学問の自由の原理の支配する最高の自由な秩序世界を創造し、知性と教養の体系的理想の殿堂とすることであった。これを象徴するものはI.Kant１７２４－１８０４)以来の１８３０年代から４０年代までにおよぶ哲学で、その特性は観念的で形而上学的であり、統一的体系志向し、その根底に理性への絶対的なまでの信頼を置いての理想主義的思想の展開であった。このようにフランスとドイツにとっては、体系的認識の尊重と整合的なものへの信奉を共通の理念とするものであった。特に、ドイツの観念論的理想主義的思想はドイツのアカデミズム文化の長所と短所を合わせもって次第に西欧の思潮となり得ていった。この近代西欧諸国の哲学思想にある主傾向をここでは仮に連続の思潮と‘数学的に’呼んだに過ぎない。この思潮の中にあって望むべき文化的傾向は、正常性を尊重し、変則、無秩序、破綻、破局等は許容される存在ではなかった。数学の世界では、連続であるものが正常であって、不連続的なものはその破綻であって、その存在は許し難いものとして異端視される傾向にあった。この傾向は学術一般の世界にも反映された。たとえば、生物学ではC.deLamark（１７４４－１８２９）からC.R.Darwin（１８０９－８２）に至る進化論は連続性の勝利であり、並行的に進展していた地質学は均一説[5]をとり連続性の一形態を固守した。基礎物理

学および化学では物質の構成は分子、原子の考えい基づき究極的には離散的な認識があったにもかかわらず、現象や実験における連続的巨視的特性の研究が流行し、弾性論、化学、熱力学の叙述は物質を連続媒質として扱った。特筆すべきものは電磁気学における J.C.Maxwell（１８３１－７９）の理論で、１９世紀物理学の連続観の勝利を記念する。これは光の粒子性（不連続性）を否定し、波動性（連続性）を証明したものとして古来からの論争に終止符を打ったかのように見なされた。

このように学問世界に蔓延した連続観は新しい物理学における物質観（量子力学的微視的物理学）の登場による不連続観の勃興とともにその矛盾をさらし、やがて両者は矛盾の止揚の中に解決されていくのは２０世紀に入ってからである。敢えて結論的に云えば、数学における連続性の問題は上記の思想圏に属し、特異性の問題はその破綻であるとともに連続性と一体化されて初めて対象の本質を認識し得るという数学の進展構造に対してのみならず、数学的対象の認識過程における弁証法的論理の成立を予知させる事態を迎えることとなる。それまでは連続の思潮は特異性概念の発展にとっては負となる外部的な最大要因であったといえよう。

（２）**内的要因 ― 近代数学の形成―** 特異性の概念に直結する数学の歴史的要素（内的要因）を知ることを目的とする。先ず近代数学全般の動向からの検証、そして特異性概念自体に注ぐ必然的な流れを分析することによって、そこに一貫して存在する共通の問題意識を捉えようとするものである。この意識こそ連続観を数学の内部から打破する原動力となった最大の要因であることが理解されよう。

１）**近代数学の動向** 全般的な動向の概観は[５]に詳しい。ここではイギリスにおける１８世紀後半から１９世紀初頭にかけて起こった産業革命を出発点とすることが妥当と思われる。この間にフランス革命（１７８９－９９）があり、それによって開かれた新しい展望の下に産業構造の改革と自然科学の開花発展に触発され、また新しい政治思想は旧い思考形態を活性化し学問諸制度の上に新しい理念を創造していく。数学の世界もその地平は大きく開かれ無限の可能性を醸成するに至る。これ等はフランス、次いでドイツ、やがてイギリスから再び到来を告げることになった。当初は産業の強大化に連れて数学はじめ科学全般に共通したものは技術的要求を満たすべく、またその実利性の向上のために開発され提供され続けたことであった。そのため数学および自然科学では数理物理学が華々しい進歩を遂げた。しかし、数学はいつまでも産業界の功利主義的体制に依存して命脈を維持するといった性格のものではなく、人間精神の知的高揚の産物としての純粋科学であるという強い自立的自律性を自覚するに至って、次第に全般的に科学の追求は数学は云うまでもなく、産業や経済からの要求から自己の問題と方法を開放して科学のための科学、数学のための数学を標榜し、実際との関係は断たれたわけではないが、学問自体の内部構築に向かう。これはより一層の基礎の発展に向かい、専門家の高レベル化に伴う分野の細分化は一層の専門化を促した。最初は時代の要求から応用的な数理物理学、そして解析学、代数学、幾何学と主要な流れが続き遂には数学基礎論の出現に至る。しかしながら、連続の思潮が勢い盛んな間は特異性の概念または不連続性の問題意識は先に見た程度の起こりでしかなかったから、１９世紀後半の半ば以降に数学の専門分化が顕著になったことを考慮すれば、この専門分化現象は初期の概念を生み出した直接の原因ないし動機にはならない。ただ、数学基礎論における集合論の形成は数学全般の共通意識としての古来からの連続性の問題の新しい出発点となり、以後解析学の中心的な方法論となるとともに連続性問題以外の問題をも対象として今日に至っているが、特異性または不連続の問題は連続性の問題を理解することなく究明し得ないものであり、その意

味では連続性概念はその胎生基盤となる。数学基礎論または点集合論はこのような意味で特異性の初期概念後の不連続観の形成に寄与したと云うべきであろう。したがって、連続の思潮下では初期概念の直接的形成要因は分野的には見出されないと云えよう。

2）**特異性概念へ注ぐもの**　上記の結論によって、初期の概念はでは一体どこから生じたのか、その発生の源泉または形成の直接的要因は何であったかが問題となり、これもまた長い検証を必要とする故、ここでは紙数の都合上結論だけにとどめたい。詳細は[６]に譲る。

先ず特異性の概念に繋がる数学上の系譜として、４人の数学者達に影響した人々とその仕事をたどること、およびそれ等の分析および評価の問題は興味深いが、結論だけ述べよう。Riemann に対して最大の影響的存在は K.F.Gauss（１７７１－１８５５）、Cayley には Plücker、Hankel には Gauss 以来の Göttingen 学派、特に Riemann と Weierstrass、Weierstrass には J.L.Lagrange（１７３６－１８１３）と A.L.Cauchy（１７８９－１８５７）であり、４人の人々に対する彼等の先導的業績の中に特異性概念に繋がる数学上の主要概念を見出すことが示される。それは、連続性の概念に関わる最も重要な数学的対象の一つである「関数の概念」に他ならない。そして、Riemann にあっては Riemann 面と代数関数、Cayley の場合は多項式と幾何学、Hankel には Fourier 級数と Riemann 積分、Weierstrass には代数関数と複素関数であった。彼等の関数の意味する多面性の追究の中に、特異性の概念は連続性の概念の一方の極としての存在であることを発見したと云えよう。よって、彼等が特異性概念へ導かれた最大の直接的要因は各人に共通した問題意識としての関数概念の確立という内発的要求に他ならない。

参 考 文 献 および 注（以下＊で示す）

（これ等の記載は最小限にとどめた。関連するものの多くは論文[５]、[６]に含まれている。）

[1]　阿部剛久，　数学の「厳密」考ノート，　芝浦工業大学工学部紀要，第 11 巻（1977），pp.　72 – 78.

[2]　村田　全，　連続性の問題（1999 年以降の著者のシリーズの総称），私論「連続性の問題」の梗概（数理解析研究所講究録 1257）（2002），pp. 142 – 149.

[3]　S. Bochner, *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, Princeton Univ.Press（1966）（村田全　訳，科学史における数学，みすず書房，初版（1968））.

[4]　S. Bochner, Singularities and Discontinuities, Proc. of the Conference on Complex Analysis（1972），Vol.II,（Rice Univ. Studies 59, 1973），No. 2, pp. 21 – 40.

[5]　阿部剛久，「特異の問題」とその数学形成をめぐって，Ⅰ ― 発生期の概念とその胎生基盤 ―，芝浦工業大学工学部紀要，第 11 巻（1977），pp. 59 – 71（本論文と次の論文は比較的小さい活字の二段組で印刷されたものであるから通常の記述の倍近い内容が掲載されている）.

[6]　阿部剛久，「特異の問題」とその数学形成をめぐって，Ⅰ ―（2）― 初期概念の成立過程とその史的意義 ―，芝浦工業大学研究報告（理工系編）Vol. 23, No. 1（1977），pp. 36 – 49.

＊　1）たとえば，Bernoulli 家中の Daniel（1700 – 82），L.Euler（1707－83），P.S.M.de Laplace（1749

－1827）等は自然科学に精通していて、彼等の仕事の現代化のいくつかは特異概念の結びつく．

＊ 2）たとえば, Laplace の影響が大きかった G.Green（1793－1841）等以来のイギリスの数理物理学の伝統の中で, W.Tomson（Lord Kelvin, 1824－1907）の調和関数やポテンシャルに関する研究は流体力学的基礎をもち,ポテンシャルの特異性の表現に結びつく．また, H.Poincaré（1854－1912）は天体力学において微分方程式の３体問題に関する解の特異点近傍での挙動を与えている．

[7] B. Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, *Gesammelte Mathematische Werke*, Leipzig（1892）, pp. 3－48.

[8] A. Cayley, On the singularities of surfaces, Cambridge and Dublin Math. J., VII（1852）, pp. 166－171.

[9] H.Hankel, Untersuchungen über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Functionen, *Gratulationsprogramm der Tübingen Universität*, vom 6, Marz 1870. また再録として次がある:Math. Annalen 20（1882）, pp. 63－112.

[10] B. Riemann, Ueber die Darstellbarkeit einer Functionen durch eine trigometrische Reihe, *Gesammelte Mathematische Werke*, Leipzig（1892）, pp. 241－271.

[11] C.Carathéodory, Vorlesungen über reelle Functionen, Teubner, Berlin（1918）.

[12] K.Weierstrass, Math. Abh. der Acad. Der Wissenschaften zu Berlin（1876）, pp. 11－46.

＊ 3）[4]の p. 25.

＊ 4）L.Bieberbach（1886－1982）はその代表的人物の一人。領域の境界上での関数の特異性の概念や定義を新たに考え直そうとしたが、成功に至らなかった。

[13] P.Griffith - J.Harris, Principles of Algebraic Geometry, John Wiley & Sons, New York（1978）.

[14] 永田雅宜, 宮西正宜, 丸山正樹, 抽象代数幾何学, 共立出版（1972）.

＊ 5） uniformitarianism. 地質変化は常に均一的に, かつ持続的に作用する力によるものだとする説で, 連続的な一形態を固守した．ついでに加えれば, この説を否定することは「激変説または大変地異説」（catasrophism）と呼ばれ, 均一説の対立説で漸次性を否定し急激な変化によるものとする古い地質変化論である．この二説の形態はそれぞれ連続と特異現象に相当し, 数学におけるカタストロフィ（catastrophe）の理論により説明できる．本稿の III で議論の対象となる．